

DOI: 10.7652/xjtuxb201503002

求解流线曲率法反命题的 一种新型有限差分方法

宫武旗, 伍儒康
(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对全三元离心叶轮流线曲率法反命题设计,提出了一种求解 S2m 流面速度梯度方程的新型有限差分解法。该方法将相对速度沿准正交线的方向导数采用前向差分格式,将相对速度沿流线的方向导数分解为两项,一项采用前向差分,另一项采用后向差分格式,其他各参量沿准正交线或流线的方向导数统一采用前向差分格式。这样便解决了简单采用前向差分格式或后向差分格式难以保证求解速度场的矩阵主对角线元素占优问题,使求解格式具有较强的稳定性和收敛性。新型有限差分求解方法应用于 Krain 叶轮的改型设计,经计算流体动力学(CFD)分析得,改型叶轮效率提高约 0.3%,压比提高约 0.2,表明利用新型有限差分法求解 S2m 流面速度梯度方程是可行的。

关键词: 有限差分法;S2m 流面;流线曲率法;反命题;全三元叶轮

中图分类号: TH452 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2015)03-0011-03

New Finite Difference Scheme for Solving Inverse Proposition of Streamline Curvature Method

GONG Wuqi, WU Rukang
(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: For the streamline curvature inverse proposition design of a full three-dimensional centrifugal impeller, a new finite difference method is put forward to solve the S2m stream surface velocity gradient equation. In the difference scheme, forward difference is chosen for the relative velocity derivative along the quasi orthogonal curve; that along the streamline direction is decomposed into two items, forward difference is used for first item, backward difference for another, and forward difference for all other parameter derivatives. The scheme solves the difficulty to guarantee the matrix main diagonal elements being dominant in solving velocity field with simple forward difference or backward difference scheme, and has higher stability and convergence. The new finite difference scheme is taken to redesign Krain impeller. The CFD analysis shows that modified impeller efficiency is increased by 0.3%, and compression ratio is heightened 0.2.

Keywords: finite difference; S2m stream surface; streamline curvature; inverse proposition; full three-dimensional centrifugal impeller

流线曲率法是叶轮机械领域中一种重要的叶轮叶片设计方法,其通过求解 S2m 流面的速度梯度方程求得流面上的速度分布,根据给定的设计参数变化规律设计出符合要求的叶片几何形状。该方法简

单、紧凑、物理意义明确,在流体机械叶轮设计中得到了广泛应用。文献[1]应用流线曲率法进行了轴流压缩机和离心压缩机的一体化设计。文献[2]研究了流线曲率法在涡轮设计中的应用。文献[3]研究了不同角动量对叶片载荷的影响。文献[4]在流线曲率法中加入了掺混模型,以模拟二次流的作用。

工程中,通常采用三次样条曲线拟合方法来求解流线曲率法的反命题问题。三次样条曲线拟合方法求解简单、实用,且在比较粗的网格时能获得比较满意的求解精度。但是,采用三次样条拟合方法对求解算法的稳定性和收敛性进行分析比较困难,有时无法得到满意的解。

本文采用有限差分法对流线曲率法的反命题进行了求解,同时给出了相应的速度梯度方程的离散格式,从而发展了一种收敛性和稳定性良好的求解方法。

1 速度梯度方程的差分格式

通过求解 S2m 流面速度梯度方程进行三元叶片的设计,根据叶轮内的欧拉方程、热力学焓熵关系式以及柱坐标系下的定常无黏相,对运动动量方程组进行化简可得到 S2m 流面内的速度梯度方程^[5]

$$\begin{aligned} \frac{dW_m}{dq} &= AW_m + B + \frac{C}{W_m} \\ A &= \frac{\cos(\alpha - \phi)}{r_c} \\ B &= \frac{d(rC_\theta)}{dm} \frac{d\theta}{dq} - \frac{d(rC_\theta)}{dq} \frac{d\theta}{dm} + \frac{dW_m}{dm} \sin(\alpha - \phi) \\ C &= -T \frac{dS_e}{dq} + \frac{dh_{in}^*}{dq} - \omega \frac{d(rC_\theta)_{in}}{dq} \\ \theta &= \int_{m_{out}}^m \frac{rC_\theta - \omega r^2}{r^2 W_m} dm + \theta_{out} \end{aligned}$$

式中: α 为流线倾角; ϕ 为准正交线 q 与 R 方向夹角; r_c 为流线在某点处的曲率半径; rC_θ 为气体环量; θ 为叶片中心面上某点的坐标; m 为流线长度; q 为准正交线长度; W_m 为相对速度 W 在子午面上的分量; T 为绝对温度; S_e 为熵; h_m^* 为进口滞止焓; ω 为转动角速度。

上述方程是通过无黏理想流动方程推导得到的速度梯度方程,适用于叶轮内主流流动未出现边界层分离时的流场计算,而边界层对流场的影响则可通过给定设计效率沿着整个流道内的分布来考虑。利用设计效率分布可以改变上述方程中熵值沿着准正交线梯度的分布,从而考虑黏性和边界层的影响。

通过分析可知,上述方程是一个关于 θ 和 W_m

的二元微分方程组,求解该方程组即可得到符合设计要求的三元叶片。方程组中各项的离散格式如下所述。

(1) dW_m/dq 。该项采用前向差分格式,即

$$\frac{dW_m}{dq} = \frac{(W_m)_{i,j+1} - (W_m)_{i,j}}{q_{i,j+1} - q_{i,j}}$$

(2) dW_m/dm 。该项的系数是 $\sin(\alpha - \phi)$,在流道中该系数可能为正数,也可能为负数,因此对于 dW_m/dm ,无论采用前向差分格式还是后向差分格式,都难以保证求解速度场的矩阵主对角线元素占优。为了保证对角线元素占优,将 dW_m/dm 展开为

$$\frac{dW_m}{dm} \sin(\alpha - \phi) = \frac{dW_m}{dm} (\sin\alpha \cos\phi - \cos\alpha \sin\phi)$$

在离心叶轮流道中, α 和 ϕ 的取值在 $[0, \pi/2]$ 范围内,对展开式的右边一项采用前向差分,另一项采用后项差分,即可保证对角线元素占优。具体为

$$\begin{aligned} \frac{dW_m}{dm} \sin(\alpha - \phi) &= \frac{(W_m)_{i,j} - (W_m)_{i-1,j}}{m_{i,j} - m_{i-1,j}} \sin\alpha \cos\phi - \\ &\quad \frac{(W_m)_{i+1,j} - (W_m)_{i,j}}{m_{i+1,j} - m_{i,j}} \cos\alpha \sin\phi \end{aligned}$$

(3) $d(rC_\theta)/dm$ 、 $d\theta/dq$ 、 $d(rC_\theta)/dq$ 、 $d\theta/dm$ 和 dS_e/dq 。对于这几项,在迭代求解 W_m 的内迭代过程中不会影响迭代算法的收敛性,只有对 θ 进行更新后才会影响算法的收敛性,此时可以考虑统一使用前向差分格式进行离散。将上述离散格式代入速度梯度方程,得

$$\begin{aligned} a_{i,j}(W_m)_{i,j} &= a_{i-1,j}(W_m)_{i-1,j} + a_{i+1,j}(W_m)_{i+1,j} + \\ &\quad a_{i,j+1}(W_m)_{i,j+1} + \frac{d(rC_\theta)}{dm} \frac{d\theta}{dq} - \frac{d(rC_\theta)}{dq} \frac{d\theta}{dm} + \frac{C}{W_m} \\ a_{i-1,j} &= -\sin\alpha \cos\phi / (m_{i,j} - m_{i-1,j}) \\ a_{i+1,j} &= -\cos\alpha \sin\phi / (m_{i+1,j} - m_{i,j}) \\ a_{i,j+1} &= -1 / (q_{i,j+1} - q_{i,j}) \\ a_{i,j} &= a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1} - A \end{aligned} \quad (1)$$

上述的差分格式在迭代求解过程中的系数矩阵是对角占优的,可直接使用雅可比迭代求解。迭代时 W_m 的理论值 W_m^* 满足

$$\begin{aligned} a_{i,j}(W_m^*)_{i,j}^{n+1} &= a_{i-1,j}(W_m^*)_{i-1,j}^n + a_{i+1,j}(W_m^*)_{i+1,j}^n + \\ &\quad a_{i,j+1}(W_m^*)_{i,j+1}^n + \frac{d(rC_\theta)}{dm} \frac{d\theta}{dq} - \frac{d(rC_\theta)}{dq} \frac{d\theta}{dm} + \frac{C}{W_m^*} \end{aligned} \quad (2)$$

将式(2)减式(1),并设 $(W_m)_{i,j} - (W_m^*)_{i,j} = e_{i,j}$,得

$$\begin{aligned} a_{i,j}e_{i,j}^{n+1} &= a_{i-1,j}e_{i-1,j}^n + a_{i+1,j}e_{i+1,j}^n + a_{i,j+1}e_{i,j+1}^n + \\ &\quad \frac{C}{(W_m^*)_{i,j}^n} - \frac{C}{(W_m^*)_{i,j}^n} \end{aligned}$$

实际计算中, C 系数对收敛性影响较小,可忽

略,则有

$$\begin{aligned} |e_{i,j}^{n+1}| &= |(a_{i-1,j}e_{i-1,j}^n + a_{i+1,j}e_{i+1,j}^n + \\ &a_{i,j+1}e_{i,j+1}^n)/a_{i,j}| \leqslant |(a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + \\ &a_{i,j+1})/a_{i,j}| \max_{i=1,Q} |e_{i,j}^n| \leqslant \max_{i=1,Q} |e_{i,j}^n| \end{aligned}$$

可见,迭代求解过程稳定收敛。具体的流线曲率法反命题求解流程如图1所示。

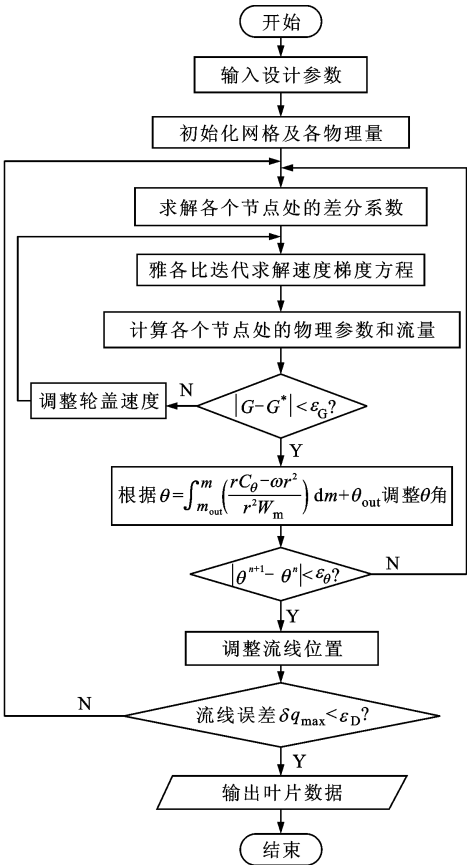


图1 反命题求解流程

2 设计算例

为了验证上述算法的可行性,本文对 Krain 叶轮^[6-7]进行了改型设计。Krain 叶轮的设计参数如表1所示。改型设计时给定的沿流线方向的环境量变化规律如图2所示。Krain 叶轮设计计算的子午速度如图3所示。采用 $dW_m/dm=0$ 作为叶轮进口边界条件。新设计叶轮与 Krain 叶轮对比如图4所示,新设计叶轮为全三元叶片结构。

表1 Krain 叶轮设计参数			
参数	数值	参数	数值
流量/ $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$	4.00	进口总压/kPa	101.325
转速/ $\text{r} \cdot \text{min}^{-1}$	22 363	进口总温/ $^{\circ}\text{C}$	15.00
叶片数	24	压比	4.7

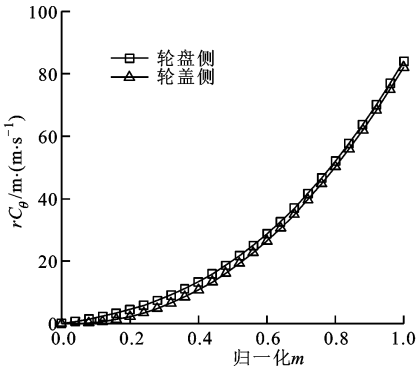


图2 环量变化规律

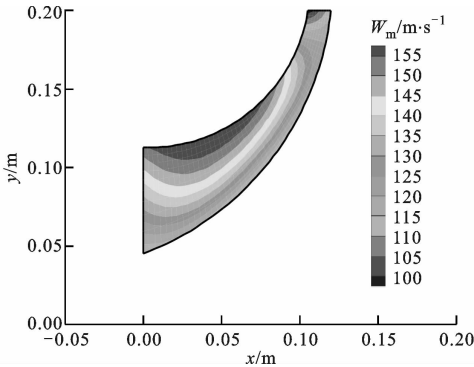
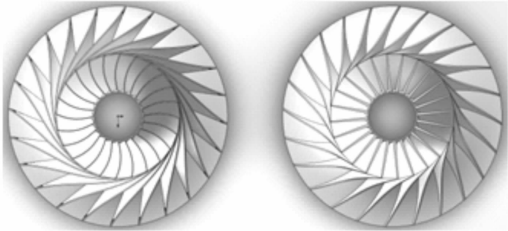


图3 Krain 叶轮子午速度



(a)新设计叶轮 (b)Krain 叶轮

图4 2种叶轮对比

3 计算流体力学分析对比

使用 CFX 软件对 Krain 叶轮和新设计叶轮进行了计算流体力学(CFD)分析计算,性能参数如图5和图6所示。

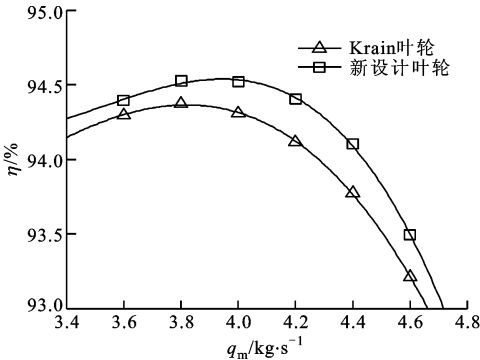


图5 叶轮效率曲线

(下转第49页)